2 Лекция 2.
1 курс, 2 семестр, 17 Февраля 2022.

2.1 Группы преобразований

Основным понятием, которое будет снова и снова появляться в наших лекциях, является симметрия. Сегодня я напомню основные математические понятия, необходимые для описания симметрий.

Пусть задано некоторое множество M (конечное или бесконечное). Рассмотрим некоторую совокупность обратимых преобразований

$$g : M \xrightarrow{g} M$$

с тождественным преобразованием e. Преобразование обратное к g обозначается g^{-1}.

Задача 2.1. Доказать, что преобразование g взаимно однозначно.

Определим композицию преобразований $g_1, g_2 \in G$ как последовательное применение

$$g_1 \circ g_2(f) = g_1(g_2(f)).$$

При таком определении ассоциативность очевидна:

$$(g_1 \circ g_2) \circ g_3 = g_1 \circ (g_2 \circ g_3)$$

Задача 2.2. Доказать.

Обратный элемент: $g^{-1} \circ g = e$.

Задача 2.3. Доказать, что $g \circ g^{-1} = e, \quad e \circ g = g \circ e = g$.

Определение абстрактной группы: Множество элементов g образует группу G с произведением $\circ$, если оно замкнуто относительно операции произведения $\circ$, $\quad g_1 \circ g_2 \in G$ $\forall g_{1,2} \in G$, и удовлетворяет аксиомам группы.

Задача 2.4. Сформулировать аксиомы группы.

Группы бывают абелевы (коммутативные): $f \circ g = g \circ f \ \forall f, g \in G$ и неабелевы.

2.2 Инварианты и орбиты

Пусть группа G действует на множестве M. Функция $I(m)$, $m \in M$ на M (со значениями где угодно) называется $(G-)$ инвариантной, если

$$I(g(m)) = I(m)\,, \qquad \forall g \in G\,, \qquad m \in M. \tag{2.1}$$

Подмножество $M_0 \subset M$ называется инвариантным, если $G(M_0) \subset M_0$.

Задача 2.5. 2.5. Убедиться, что действие группы G задает отношение эквивалентности на M по правилу

$$g(m) \sim m\,, \qquad \forall g \in G. \tag{2.2}$$

Определение: классы эквивалентности образуют *орбиты* группы G в M.

Задача 2.6. Дать определение отношения эквивалентности и классов эквивалентности.

Примером множества инвариантного относительно G может служить сама группа G. При этом действие G на себе может быть задано тремя неэквивалентными способами:

Левое действие $g(f) := g \circ f$

Правое действие $g(f) := f \circ g^{-1}$.

Присоединенное действие $g(f) := g \circ f \circ g^{-1}$.

Задача 2.7. Убедится, что все три операции задают действие группы на себе согласованное с законом композиции в группе в том смысле, что

$$g_1(g_2(f)) = (g_1 \circ g_2)(f)\,.$$

.

Задача 2.8. Убедится, что по отношению к левому и правому действию G не содержит инвариантных подмножеств кроме всей G.

По отношению к присоединенному действию группа может содержать инвариантные подмножества $M \subset G$. Такие подмножества называются классами сопряженных элементов. Вообще говоря, они могут не образовывать подгрупп G. Тривиальный класс E образован единичным элементом e.

Определение: Любая *собственная* инвариантная подгруппа $H \subset G : H \neq G, E$ называется *нормальным делителем* G.

Определение: Группа G называется *простой*, если не содержит нетривиальных (т.е., отличных от e и G) нормальных делителей. Название *простая* дано по аналогии с простыми числами, которые ни на что не делятся кроме себя и единицы.

Простые группы образуют важный класс, допускающий полную классификацию в конечном и конечномерном случае (Картан). Конечномерные комплексные группы содержат четыре серии A_n, B_n, C_n, D_n $(n = 1, 2, \ldots)$ и пять исключительных G_2, F_4, E_6, E_7 и E_8. Что скрывается за этими обозначениями мы будем постепенно выяснять.

Пусть H - некоторая подгруппа G. Очевидно G инвариантно относительно левого действия $H : h(g) = h \circ g$. Множество орбит H в G - *пространство классов смежности (фактор-пространство, косет)* G/H. Для произвольной подгруппы $H \subset G$, G/H не обладает групповой структурой. Но если H нормальный делитель, G/H наделяется групповой структурой.

Задача 2.9. Доказать.

2.3 Примеры

- Группа корней степени N из 1: циклическая группа $\mathbb{Z}_N$
- Целые числа по сложению: $\mathbb{Z}$.

- Группа перестановок N элементов: симметрическая группа S_N.
- Рациональные числа $\mathbb{Q}_N$ по сложению.
- Вещественные числа по сложению: $\mathbb{R}_N$.
- Группа невырожденных матриц $n \times n$: GL_n

$$A_i^j\,, \qquad i;j=1\,, \qquad \ldots\,, \qquad n\,, \qquad \det A_i^j \neq 0.$$

- Группа матриц $n \times n$ с единичным детерминантом: SL_n

Задача 2.10. Как определяется произведение матриц?

Группы бывают конечные (с конечным числом элементов) и
бесконечные (с бесконечным числом элементов)

Задача 2.11. Какие из перечисленных групп конечны и бесконечны?

Число элементов группы G называется ее порядком $|G|$ $(\mathrm{ord}(G))$. В случае бесконечных групп порядком называется их мощность как множества.

Задача 2.12. Каковы порядки перечисленных групп?

Среди бесконечных (континуальных) групп выделенную роль играют непрерывные группы и их наиболее важный подкласс групп Ли. В этом случае говорят о *размерности группы* как о числе непрерывных координат, которые необходимо задать для определения элемента группы.

Задача 2.13. Какие из перечисленных групп непрерывны?

Задача 2.14. Каковы размерности $\mathbb{R}\,, GL_n\,, SL_n$?

3. Линейная алгебра

Задача 2.15. Дать определение поля и линейного пространства.

Базис: $\{e_i \in V\}$

$$\forall x \in V : x = \sum_i x^i e_i\,, \qquad x^i \in \mathbb{K} = \mathbb{R}\,, \qquad \mathbb{C}\,, \qquad x=0 \to x^i = 0$$

Правило суммирования Эйнштейна: $\sum_i x^i e_i \equiv x^i e_i$

Подпространство $W \subset V$ это подмножество V, которое само имеет структуру линейного пространства. *Фактор-пространство* V/W это пространство классов эквивалентности

$$v \sim v + w \qquad \forall w \in W \tag{2.3}$$

Задача 2.16. Доказать, что такое определенное действительно задает отношение эквивалентности.

Задача 2.17. Доказать, что V/W обладает структурой линейного пространства.

Алгебра A это линейное пространство, снабженное операцией произведения

$$\forall a\,, b \in A \qquad ab \in A$$

такой, что

$$(\lambda a + \mu b)c = \lambda ac + \mu bc\,, \qquad c(\lambda a + \mu b) = \lambda ca + \mu cb\,, \qquad \lambda, \mu \in \mathbb{K}. \tag{2.4}$$

Алгебры бывают

- *Ассоциативные* и нет
- *Коммутативные* $ab = ba$ и некоммутативные
- *Унитальные* (с единичным элементом e) и нет.

$$e \in A: \quad ea = ae = a\,, \qquad \forall a \in A \tag{2.5}$$

Комплексные матрицы $n \times n$ образуют алгебру $Mat_n(\mathbb{C})$ по отношению к матричному произведению.

Задача 2.18. Как определяется структура линейного пространства в алгебре матриц?

Задача 2.19. Какими свойствами из вышеперечисленных обладает алгебра $Mat_n(\mathbb{C})$?

Еще пример: алгебра функций $f(x)$. Какие функции надо уточнять. Например, полиномы или квадратично интегрируемые функции.

Задача 2.20. Доказать для этих случаев, что они образуют алгебры.

Подалгебра $B \subset A$: подмножество, которое само является алгеброй.

Лекция 3.
1 курс, 2 семестр, 24 Февраля 2022

3.4 Алгебра - продолжение

Понятие групповой алгебры. Пусть G - конечная группа. $A(G)$ - групповая алгебра, которая по определению состоит из элементов векторного пространства

$$\sum_i \lambda^i g_i\,, \qquad \lambda^i \in \mathbb{K}\,, \qquad g_i \in G. \tag{3.1}$$

Здесь g_i перечисляют все элементы G, которые считаются линейно независимыми. Произведение базисных элементов g_i в $A(G)$ задается групповым законом композиции

$$g_i \circ g_j = f_{ij}^k\, g_k\,, \tag{3.2}$$

где f_{ij}^k удобно считать равным единице, если $g_k = g_i \circ g_j$ и нулем в остальных случаях.

Задача 3.1. Какими свойствами обладает групповая алгебра?

Задача 3.2. В чем отличие понятий ассоциативной алгебры и группы? Чем отличается алгебра матриц $Mat_n(\mathbb{C})$ от группы матриц $GL_n(\mathbb{C})$?

Линейное пространство $I \in A$ называется левым идеалом A если

$$ai \in I \qquad \forall i \in I\,, \qquad a \in A \tag{3.3}$$

Правый идеал определяется аналогично по отношению к правому умножению на $a \in A$.

Идеал I называется двусторонним, если он является одновременно левым и правым. Понятие двустороннего идеала в алгебре аналогично понятию нормальной подгруппы в группе. Фактор пространство A/I образует алгебру.

Задача 3.3. Доказать.

Задача 3.4. Найти левые и правые идеалы алгебры матриц $n \times n$ $Mat_n(\mathbb{R})$.

Замечание: Для коммутативных алгебр понятия левого, правого и двустороннего идеалов совпадают.

Рассмотрим пример алгебры A бесконечно дифференцируемых функций одной переменной $f(x)$. Рассмотрим идеал (какой?) I_n, образованный функциями вида $f(x) = (x^n - 1)f(x)$.

Задача 3.5. Доказать, что I_n образует идеал.

Задача 3.6. Что за алгебра A/I_n? Допускает ли интерпретацию в терминах групповой алгебры?

3.5 Многообразия и их размерность

$\mathbb{R}^n$ - n-мерное векторное пространство $(x_1\,, x_2\,, \ldots, x_n)\,,$ $\qquad x^i$ с $i = 1\,, \ldots, n$ называются координатами $\mathbb{R}^n$. По определению, $\dim \mathbb{R}^n = n$. В общем случае многообразие локально (т.е., в окрестности любой точки) устроено так же как $\mathbb{R}^n$. Рассмотрим подпространство $\mathbb{R}^n$, выделяемое р уравнениями

$$x_1 = 0\,, \ldots\,, x_p = 0. \tag{3.4}$$

Очевидно, это $\mathbb{R}^{n-p}$, а его размерность есть $n-p$. Этот факт оказывается совершенно общим: если координаты многообразия размерности n ограничить p уравнениями, обладающими определенными свойствами гладкости и невырожденности (например, не надо накладывать одно и то же уравнение дважды), то получится многообразие размерности $n-p$. Оказывается, любое многообразие может быть вложено в $\mathbb{R}^m$ достаточно большой размерности. Например, n-мерная сфера S^n задается одним уравнением

$$\sum_{i=1}^{n+1} (x^i)^2 = R^2 \tag{3.5}$$

в $\mathbb{R}^{n+1}$. По определению, S^n имеет размерность n.

Действительно, рассмотрим окрестность северного полюса $x^i = (0, \ldots 0, R)$. В окрестности, северного полюса координаты имеют вид

$$x^i = (x^1, \ldots x^n, R(1 - \sum_{\alpha=1}^{n} x^\alpha x^\alpha)^{1/2})\,,$$

где $x^1, \ldots x^n$ малы и описывают область в $\mathbb{R}^n$, т.е. окрестность северного полюса как и любой другой точки сферы не отличается от области $\mathbb{R}^n$. Поэтому размерность сферы равна n.

В общем случае, условие, что система p уравнений в $\mathbb{R}^n$

$$f^\alpha(x) = 0 \qquad\qquad \alpha = 1, 2, \ldots, p\,, \qquad p \leq n \tag{3.6}$$

описывает многообразие M размерности $n-p$, есть

$$rank\left|\frac{\partial f^\alpha(x)}{\partial x^\beta}\right| = p \qquad \forall x \in M\,. \tag{3.7}$$

Задача 3.7. Убедиться, что это условие выполнено для уравнения сферы (3.5).

Замечание: уравнение сферы нулевого радиуса не удовлетворяет условию невырожденности, описывая одну точку $x^i = 0$. Точное определение понятия гладкого многообразия дается в курсе дифференциальной геометрии. Материал, этой и предыдущей лекций, содержит набор понятий, терминов и фактов, необходимых для изучения симметрий физических систем. Эти лекции в дальнейшем можно использовать как справочник.

3.6 Нерелятивистские симметрии

Начнем со школьной физики. Второй закон Ньютона имеет вид.

$$m\ddot{x}^i(t) = F^i(x(t)) \tag{3.8}$$

где $x^i(t)$ - координаты частицы массы m в момент времени t. Как обычно, точка обозначает дифференцирование по времени

$$\dot{a} := \frac{\partial a}{\partial t}\,, \tag{3.9}$$

$F(x)$ - сила, действующая на частицу в точке x. Начнем со случая нулевой внешней силы

$$m\ddot{x}^i(t) = 0\,. \tag{3.10}$$

В этом случае общее решение динамических уравнений имеет вид

$$x^i(t) = x^i{}_0 + v^i t\,, \tag{3.11}$$

выражающий первый закон Ньютона: свободная частица движется прямолинейно и равномерно.

Каковы симметрии уравнения Ньютона с $F^i = 0$? Эквивалентно, какие преобразования переводят решение в решение?

Сдвиги пространства на постоянный вектор a^i :

$$x^i(t) \to x^i_0(t) = x^i(t) + a^i\,, \qquad\qquad \dot{a}^i = 0 \tag{3.12}$$

На решениях

$$x^i_0 \to x^i_0 + a^i \tag{3.13}$$

Сдвиги времени

$$t \to t + T\,, \qquad x(t) \to x(t+T)\,, \qquad x^i_0 \to x^i_0 + Tv^i \tag{3.14}$$

Хотя эти преобразования похожи по форме на сдвиги пространства, отличие в том, что величина сдвига зависит от скорости частицы, т.е. различна для разных частиц.

Переход к другой инерциальной системе, движущейся относительно исходной с постоянной скоростью u

$$x^i(t) \to x^i(t) + u^i t \tag{3.15}$$

Очевидно, на решениях (3.11) это дает нерелятивистский закон сложения скоростей

$$v^i \to v^i + u^i \tag{3.16}$$

Все перечисленные преобразования входят в группу Галилея.

Задача 3.8. Проверить, что они действительно образуют группу.

Задача 3.9. Сколько независимых параметров в группе Галилея?

А что еще мы не рассмотрели? Очевидно, уравнения (3.10) переходят в себя при линейных преобразованиях

$$x^i(t) \to A_i^j x_j(t) \tag{3.17}$$

с произвольной постоянной невырожденной матрицей

$$A_i^j\,, \qquad \det A_i^j \neq 0.$$

Задача 3.10. Какую группу образуют эти преобразования?

Пусть G - группа всех перечисленных преобразований.

Задача 3.11. Содержит ли G нетривиальные нормальные делители? Если да, то какие? Что будет минимальной фактор-группой G/N?

Совокупность симметрий уравнений свободного движения G выходит за рамки группы Галилея.

Задача 3.12. В чем отличие?

Например G содержит подгруппу растяжений с $A_j^i = a\delta_j^i$, где $a \neq 0$, а δ_j^i как обычно обозначает единичную матрицу. Очевидно, при таких преобразованиях

$$x^i(t) \to a x^i(t)\,. \tag{3.18}$$

Такие преобразования называются дилатациями. Они входят в группу конформных преобразований, которая проявляется при высоких энергиях и при изучении фазовых переходов.

В действительности, группа симметрий свободных уравнений частицы еще больше. Например, в нее входят растяжения времени.

Задача 3.13. Определить их действие.

В группу Галилея входит лишь подгруппа трехмерных вращений и отражений $O(3) \subset GL(3)$. Чтобы в этом разобраться, на следующей лекции мы рассмотрим более реалистическую ситуацию со взаимодействующими частицами.

Размерность непрерывной группы совпадает с числом независимых непрерывныз параметров преобразований симметрии.

Задача 3.14. Вычислить размерность группы Галилея.

Рассмотренный пример иллюстрирует общее явление: симметрии свободных динамических систем обычно выше, чем симметрии систем со взаимодействием (силами). В рассмотренном случае группа $GL(3)$ редуцируется до своей подгруппы $O(3)$.

Задача 3.15. Чему равен аналог группы $GL(3)$ для N свободных (невзаимодействующих) частиц?

4 Лекция 4 курс, 2 семестр, 3 Марта 2022

4.1 Нерелятивистские симметрии - продолжение

Сегодня продолжим рассмотрение симметрий нерелятивистских систем частиц, перейдя к уравнениям взаимодействующих частиц. Для этого вспомним, как взаимодействуют точечные частицы в нерелятивистской (ньютоновской) гравитации или заряженные частицы в электростатике. Пусть разные частицы занумерованы индексом $\alpha, \beta = 1, \ldots, N$. Тогда силы между парой частиц с номерами и в электростатике и нерелятивистской теории тяготения имеют вид

$$F^i(\vec{x}_\alpha - \vec{x}_\beta) = \frac{q_\alpha q_\beta}{4\pi\varepsilon_a |x_\alpha - x_\beta|^3}(x^i_\alpha - x^i_\beta)\,, \qquad |x_\alpha - x_\beta| = \sqrt{\sum_k |x^k_\alpha - x^k_\beta|^2} \tag{4.1}$$

$$F^i(\vec{x}_\alpha - \vec{x}_\beta) = \frac{m_\alpha m_\beta}{|x_\alpha - x_\beta|^3}(x^i_\alpha - x^i_\beta) \tag{4.2}$$

Еще один известный вам тип сил отвечает частицам, связанным пружинкой:

$$F^i(\vec{x}_\alpha - \vec{x}_\beta) = k(x^i_\alpha - x^i_\beta) \tag{4.3}$$

Уравнения движения для частицы с номером имеют вид

$$m\ddot{x}^i_\alpha(t) = \sum_{\alpha\neq\beta} F^i(\vec{x}_\alpha(t) - \vec{x}_\beta(t)). \tag{4.4}$$

Важным свойством всех этих уравнений является то, что величина силы зависит только от расстояния между частицами, а направление определяется вектором разности векторов их положений. Такие силы называются центрально симметричными. Поскольку расстояние между точками инвариантно относи тельно поворотов, то уравнения взаимодействующих частиц инвариантны отно сительно подгруппы группы $GL(3)$, которая не меняет расстояний. Эта группа называется ортогональной группой $O(3)$.

Задача 4.1. Убедиться, что преобразования (3.12)-(3.15) по-прежнему задают симметрии уравнений (4.4). В совокупности с $O(3)$ эти преобразования задают группу Галилея в трех- мерном пространстве, являющуюся фундаментальной симметрией нереляти вистской физики. Чему равна размерность группы Галилея? Прежде чем заняться более детальным изучением ортогональных групп сделаю следующее важное замечание. Симметрия уравнений (4.1) и (4.2) выше, чем группа Галилея. Действительно, кроме преобразований из группы Галилея, эти уравнения инвариантны относительно растяжений

$$x^i_\alpha \to \lambda x^i_\alpha\,, \qquad t \to \mu t\,, \tag{4.5}$$

если параметры растяжений λ и μ связаны определенным образом.

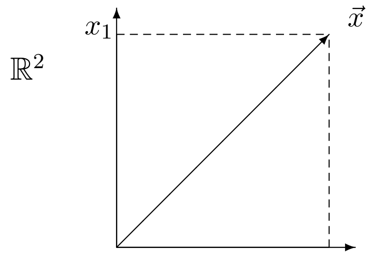
Задача 4.2. Найти как связаны λ и μ.

Забегая вперед скажу, что это не случайно: уравнения электродинамики и (линейной) гравитации обладают конформной симметрией из-за того, что электромагнитное и гравитационное поля безмассовы - распространяются со скоростью света. Уравнения (4.3) также обладают дополнительной симметрией.

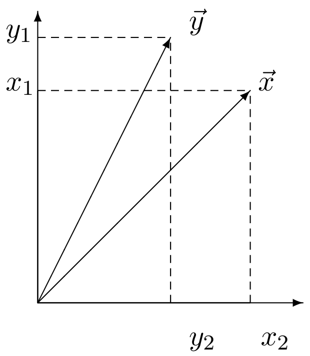
Задача 4.3. Найти какой. Это также не случайно, и связано с интегрируемостью (точной решаемостью) системы (4.3). Но если в системе присутствуют силы обоих типов (например, упругие и электростатические), то конформная симметрия исчезает (нарушается).

4.2 Движения эвклидового пространства

Рассмотрим двумерную плоскость $\mathbb{R}^2$. Точки плоскости задаются векторами $\vec{x}$-



Пусть заданы две точки $\vec{x}$ и $\vec{y}$.



Расстояние между точками вычисляется по теореме Пифагора

$$l^2 := (y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2. \tag{4.6}$$

Преобразования координат, сохраняющие расстояния, называются движениями плоскости. Имеется два типа движений.

1. Сдвиги

$$\vec{x} \to \vec{x} + \vec{a}; \quad \vec{y} \to \vec{y} + \vec{a}. \tag{4.7}$$

$\vec{a}$ - вектор сдвига. t_a - оператор сдвига.

$$t_a(\vec{x}) = \vec{x} + \vec{a}. \tag{4.8}$$

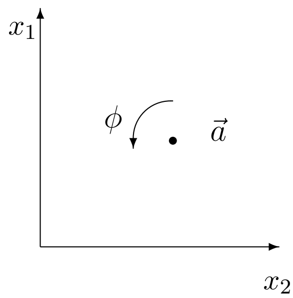
Сдвиги t_a образуют группу трансляций T^2. Мы уже встречали эту группу при анализе симметрий нерелятивистских уравнений. Эта группа абелева

$$t_a t_b = t_b t_a. \tag{4.9}$$

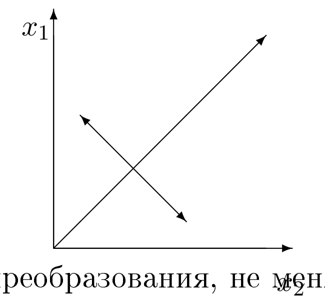
Задача 4.4. Следствием какого свойства векторов является этот факт?

Задача 4.5. Какое многообразие образует T^2? Какова его размерность?

2. Вращения $SO(2)$: $M_{a\phi}$ - поворот на угол ϕ вокруг точки a.



3. Отражения относительно любой прямой



Аналогично, преобразования, не меняющие длин в $\mathbb{R}^n$, образуют группу движений евклидового пространства E^n. Такие преобразования допускают аналитическое представление

$$x^i \to x'^i = A^i{}_j x^j + a^i \,, \qquad i,j = 1\,, \ldots, \, n \tag{4.10}$$

где a^i описывает сдвиг, а матрица $A^i{}_j$ - ортогональное преобразование при условии, что

$$A^i{}_k A^j{}_l \delta_{ij} = \delta_{kl} \tag{4.11}$$

(по повторяющимся индексам производится суммирование). Условие (4.11) буквально выражает условие инвариантности расстояния

$$l^2 := \delta_{ij}(y^i - x^i)(y^j - x^j). \tag{4.12}$$

Задача 4.6. Убедиться

Заметим, что единичная матрица δ_{ij} с двумя нижними индексами задает метрику евклидового пространства E^n в декартовых координатах.

4.3 Ортогональная группа

Матрицы $A^i{}_j$, удовлетворяющие условию (4.11), образуют ортогональную группу $O(n)$, если $i,j = 1\,, \ldots, \, n$. Единичный элемент задается единичной матрицей $A^i{}_j = \delta^i_j$.

Задача 4.7. Убедиться, что единичная матрица удовлетворяет (4.11).

Задача 4.8. Проверить групповое свойство: матрица AB удовлетворяет (4.11), если A и B удовлетворяют (4.11).

Из условия (4.11) следует, что

$$(\det A^i{}_j)^2 = 1 \rightarrow \det A^i{}_j = \pm 1. \tag{4.13}$$

В частности, отсюда следует, что матрицы A, удовлетворяющие (4.11), обратимы. В качестве примера ортогональной матрицы с детерминантом -1, можно взять матрицу $A^i{}_j$ с компонентами

$$A^1_1 = -1\,, \qquad A^n{}_n = 1 \text{ для } n \neq 1\,, \qquad A^n{}_m = 0 \text{ для } n \neq m. \tag{4.14}$$

Преобразование (4.10) описываемое такой матрицей A^i_j и сдвигом $a^i = 0$ дает преобразования

$$x^1 \rightarrow -x^1\,, \qquad x^n \rightarrow x^n \text{ для } n \neq 1. \tag{4.15}$$

Иными словами, эта матрица описывает отражение оси x^1. Очевидно, для этой матрицы

$$\det A^i_j = -1. \tag{4.16}$$

Специальная ортогональная группа $SO(n)$, которая и описывает истинные вращения, состоит из матриц с единичным детерминантом

$$\det A = 1: \qquad SO(n). \tag{4.17}$$

Очевидно, $SO(n)$ - подгруппа $O(n)$. Преобразования из $O(n)$ с $\det A = -1$ содержат отражения.

Задача 4.9. Убедиться, что такие преобразования не связаны непрерывным образом с единичным элементом $O(n)$. (Эквивалентно, не принадлежат связной компоненте единицы $O(n)$).

Теперь вычислим размерность $O(n)$, т.е. сколько независимых вращений в $O(n)$. Матрицы A^i_j содержат n^2 компонент (т.е. могут рассматриваться как координаты в $\mathbb{R}^{n^2}$). Они подчинены уравнениям (4.11). В силу симметрии по индексам $k\,, l$ (4.11) содержат $\frac{1}{2}n(n+1)$ уравнений. Значит, в силу теоремы о неявной функции, размерность $O(n)$ равна

$$\dim O(n) = n^2 - \frac{1}{2}n(n+1) = \frac{1}{2}n(n-1). \tag{4.18}$$

Замечание. Условие невырожденности (3.7) несложно проверить: используя, что $O(n)$ - группа, его достаточно проверить при $A^i_j = \delta^i_j$ (сначала продифференцировать в (3.7), а потом положить $A^i_j = \delta^i_j$).

Задача 4.10. Найти dim $SO(n)$.

Группа $O(n)$ состоит из двух непересекающихся кусков. Один из них - это $SO(n)$. А другой - той же размерности - образован матрицами с $\det(A) = -1$. Размерность $SO(n)$ определяет число независимых поворотов. Очевидно, размерность $SO(n)$ совпадает с числом двумерных плоскостей, натянутых на орты в $\mathbb{R}^n$. Т.е. каждой такой плоскости отвечает свой поворот - поворот этой плоскости. Как и ожидалось, $\dim SO(3) = 3$.

Чтобы понять как решения уравнения (4.11) задают повороты и отражения, рассмотрим более подробно группу двумерных вращений $O(2)$. В этом случае, уравнения (4.11) дают

$$(A^1{}_1)^2 + (A^2{}_1)^2 = 1\,, \tag{4.19}$$

$$(A^1{}_2)^2 + (A^2{}_2)^2 = 1\,, \tag{4.20}$$

$$A^1{}_1 A^1{}_2 + A^2{}_1 A^2{}_2 = 0\,. \tag{4.21}$$

Первые два уравнения легко решить в виде

$$A^1{}_1 = \cos\varphi_1\,, \qquad A^2{}_1 = \sin\varphi_1 \tag{4.22}$$

$$A^2{}_2 = \cos\varphi_2\,, \qquad A^1{}_2 = \sin\varphi_2\,. \tag{4.23}$$

Последнее приобретает вид

$$0 = \cos\varphi_1 \sin\varphi_2 + \cos\varphi_2 \sin\varphi_1 = \sin(\varphi_1 + \varphi_2)\,. \tag{4.24}$$

Это уравнение имеет два решения

$$\varphi_2 = -\varphi_1 \tag{4.25}$$

$$\varphi_2 = \pi - \varphi_1 \tag{4.26}$$

Первое решение описывает поворот на угол φ_1, а второе - отражение.

Задача 4.11. Доказать. Вычислить детерминанты матрицы $A^i{}_j$ в этих случаях. Найти отражение, описываемое уравнением (4.26).

Задача 4.12. Доказать, что уравнение (4.11) эквивалентно уравнению

$$A^i{}_k A^j l \delta^{kl} = \delta^{ij}\,, \tag{4.27}$$

т.е., всякое решение (4.11) является решением (4.27) и наоборот.

5 Лекция 5.
1 курс, 2 семестр 10 Марта 2022.

5.1 Движения эвклидова пространства

Движением евклидова пространства называется такое преобразование, которое не меняет длин и углов. Общее движение R^n является комбинацией поворота и сдвига

$$x^i \to x'^i = A^i{}_j x^j + a^i \,, \qquad i, j = 1 \ldots n \,, \tag{5.1}$$

где матрица $A^i{}_j$ принадлежит ортогональной группе $O(n)$. Совокупность таких преобразований образует группу движений n-мерного евклидова пространства, обозначаемую как $E(n)$ или $IO(n)$ (*Неоднородная ортогональная группа*).

Задача 5.1. Найти $dim\, E(n)$.

Обозначая сдвиг на a^i как t_a и поворот вокруг начала координат, задаваемый матрицей $A^i{}_j$, как M^0_A, любой элемент $E(n)$ можно представить в виде

$$G_{A,a} = t_a M^0_A \,. \tag{5.2}$$

Рассмотрим преобразование

$$M^a_A := t_a M^0_A t_a^{-1} \,.$$

Задача 4.1. Показать, что M^a_A реализуется как

$$x'^i = A^i{}_j (x^j - a^j) + a^i \,.$$

Оно описывает поворот вокруг точки $x^i = a^i$, поскольку она остается неподвижной. (Отметим, что, как легко видеть, у чистых (т.е. нетривиальных) сдвигов неподвижных точек нет.)

Таким образом, поворот вокруг точки a^i сводится к такому же повороту вокруг начала координат в комбинации со сдвигом на $a^i - A^i{}_j a^j$ В результате, группа $E(n)$ порождается сдвигами и поворотами вокруг любой точки.

Рассмотрим теперь преобразование $M^0_A t_a M^0_{A^{-1}}$. Очевидно, оно дает

$$x'^i = A^i{}_j (A^{-1 j}{}_k x^k + a^j) = x^i + A^i{}_j a^j \,.$$

Отсюда следует, что $M^0_A t_a M^0_{A^{-1}} = t_{Aa}$. Это, в частности, означает, что M^0_A и t_a некоммутативны, т.е., поменяв в (5.2) M и t местами, мы получим другой элемент $E(n)$.

Так как для сдвигов также выполняется $t_b t_a t_{-b} = t_a$, отсюда следует, что подгруппа сдвигов $T(n)$ является нормальным делителем $E(n)$.

Задача 4.2. Доказать, что $H = M^0_A$ не является нормальным делителем $E(n)$.

Группа $E(n)$ действует в $\mathbb{R}^n$. Напомню, что орбитой точки x под действием группы G называется множество точек Gx. Легко видеть, что орбитой любой точки $\mathbb{R}^n$ под действием $E(n)$, а также под действием подгруппы сдвигов $T(n)$, является все пространство $\mathbb{R}^n$.

А как выглядят орбиты точек $\mathbb{R}^n$ под действием группы $O(n)$, реализованной преобразованиями вида M_A^0? Они представляют собой $n-1$ - мерные сферы S^{n-1} радиуса R, если соответствующие x находятся на расстоянии R от начала координат. Вследствие этого $O(n)$ является группой движений S^{n-1}. Размерность ортогональной группы есть $dimO(n) = \frac{n(n-1)}{2}$.

Рассмотрим окружность S^1 и функции на ней $f(\phi)$, где $\phi \in [0, 2\pi)$ – угол. Поворот на этом языке – это сдвиг $\varphi \to \varphi + \psi \, mod \, 2\pi$, где ψ – другой угол. Таким образом, $SO(2)$–это трансляция с периодической координатой.

Какие еще преобразования, помимо движений, можно рассматривать? Можно, например, рассмотреть совокупность преобразований, от которых требуются только гладкость (дифференцируемость)и взаимнооднозначность. Они называются *диффеоморфизмами.* Диффеоморфизмы многообразий типа плоскости или окружности можно представлять себе как растяжения и сжатия резинки соответствующей топологии.

Существует также важный класс конформных преобразований, которые могут менять расстояния, но сохраняют углы. Имеется два типа таких преобразований:

(1) дилатации $x'^i = ax^i \ a \in \mathbb{R}$.

(2) инверсии $x'^i = \frac{bx^i}{x^2} \ b \in \mathbb{R}$.

Задача 4.3. Проверить.

Всевозможные комбинации этих преобразлваний образуют полную *конформную группу.* Оказывается, что конформная группа d-мерного пространства это псевдоортогональная группа $O(d+1, 1)$ (в более физически интересном релятивистском случае $O(d, 2)$), которая по определению сохраняет инвариантной метрику η^{AB} $(A, B = 0, \ldots d+1$ $d+2$-мерного пространства с сигнатурой $d+1, 1$ ($d+1$ плюсов и один минус), т.е. η^{AB} - диагональная матрица, у которой на диагонале $d+1$ единиц и одна -1, что, как мы скоро поймем, эквивалентно группе Лоренца в $d+2$-мерном пространстве-времени.

Рассмотренные нами группы $E(n)$, $T(n)$, $O(n)$ являются примерами групп Ли, т.е. групп, элементы которых задаются непрерывными параметрами (координатами). Таким образом, группы Ли представяют собой многообразия (поверхности), которые действуют сами на себе (причем гладко - точно определять здесь не буду, отсылая к математическим учебникам или курсам).

Примеры:

(1) группа сдвигов $T(n)$ сама представляет собой пространство $\mathbb{R}^n$ (каждая точка $\mathbb{R}^n$ задает сдвиг в $\mathbb{R}^n$) и действует на себе естественным образом: $t_a b^i = a^i + b^i$.

(2) каждая точка ψ окружности S^1 задает сдвиг S^1 $t_\psi \varphi = \varphi + \psi \, mod \, 2\pi$

(3) $O(n)$– это поверхность, вложенная в R^{n^2} с координатами $X^i{}_j$, удовлетворяющими условию ортогональности

$$X^i{}_k X^j{}_l \eta_{ij} = \eta_{kl} \,,$$

где η_{ij} - симметричная положительно определенная билинейная форма.

Условие напоминает уравнение сферы $x^i x_i = R^2$, но, в отличие от последнего, допускает действие на себе.

Задача 4.4. Сравнить размерности $O(n)$ и $SO(n)$.

5.2 Однородные пространства

Пространство M, на котором задано действие группы G, называется G- однородным, если $\forall x_1, x_2 \in M$ существует $g \in G$ такой, что $x_2 = gx_1$. Иными словами, пространство M-однородно, если G переводит любую его точку в любую другую.

Важная теорема, которую я оставлю Вам в качестве домашнего задания, гласит:

Все G-однородные пространства M являются фактор-пространствами (косетами) $M = G/H$, где H–группа стабильности (симметрии) любой точки M.

Задача 4.5. Доказать, что H не зависит от выбора точки в G-однородном M.

Таким образом, однородные пространства можно описывать на теоретико-групповом языке.

Важным примером однородного симметричного пространства является n-мерная сфера S^n.

Задача 4.6. Доказать, что $S^n = O(n+1)/O(n)$.

Другой пример связан с действием $E(n)$ на $\mathbb{R}^n$, которое, очевидно, однородно. Подгруппа стабильности точки $x = 0$ – это $O(n)$. Согласно теореме, отсюда следует, что $\mathbb{R}^n = E(n)/O(n)$.

Задача 4.7. Доказать.

Имеет место и другое схожее соотношение. А именно, поскольку $T(n)$ есть нормальный делитель $E(n)$, то он порождает фактор группу $E(n)/T(n)$ (не путать с пространством смежных классов!)

Задача 4.8. Объяснить в чем отличие

Действительно, из (5.1) видно, что $E(n)/T(n) = O(n)$.

Задача 4.9. Доказать.

В заключение отмечу следующее. Наивное действие конформных преобразований плохо определено в евклидовом пространстве, поскольку инверсии отображают начало координат в бесконечность. Оказывается, что ситуация исправляется путем добавления точек беконечности - так называемой конформной бесконечности. Научный способ добиться этого состоит в том, чтобы рассмотреть фактор-пространство $O(d+1,1)/P$, где P подходящая подгруппа $P \subset O(d+1,1)$, называемая параболической. (Параболических подгрупп много, хотя и конечное число. P - одна из них. Грубо говоря, параболические подгруппы это группы тех или иных нижне треугольных матриц.) Ключевое место в том, что фактор пространство G/H всегда хорошо определено как многообразие, т.е. там не может быть никаких бесконечностей. Исходное эвклидово пространство это его часть, которая называется *большой клеткой.* Остальная часть $O(d+1,1)/P$ - это конформная бесконечность. А все вместе называется *компактифицированным пространством.* Когда мы немного нарастим мускулы, нам будет по силам описать конформную бесконечность более явно, причем в важном релятивистском случае.

6 Лекция 6.
1 курс, 2 семестр 17 Марта 2022.

6.0.1 Двойственное пространство

Пусть V - линейное пространство над полем $\mathbb{K}$. *Двойственное пространство* V^* определяется как пространство линейных отображений из V в $\mathbb{K}$. Отображение $f(V)$ называется линейным если

$$f(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2) = \lambda_1 f(v_1) + \lambda_2 f(v_2) \qquad \forall \quad v_{1,2} \in V\,, \quad \lambda_{1,2} \in \mathbb{K}\,.$$

Действительно, линейные отображения образуют линейное пространство, если определить линейную комбинацию отображений f_1 и f_2 по правилу

$$(\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2)(v) = \lambda_1 f_1(v) + \lambda_2 f_2(v)$$

Задача 4.10. Доказать, что такое определение задает линейное отображение.

Пусть $\{e_i\}$ задает базис в V. Тогда любой вектор $v \in V$ представляется в виде

$$v = v^i e_i$$

с некоторыми коеффициентами v^i, а любое линейное отображение $f(v)$ задается в виде

$$f(v) = v^i f_i\,,$$

где f_i - некоторые коэффициенты со значениями в $\mathbb{K}$.

Задача 4.11. Доказать.

Элемент V^* можно представить в виде

$$f = f_i e^i\,,$$

где e^i - базисные элементы V^* такие, что

$$e^i(e_j) = \delta^i_j\,.$$

Отмечу, что в этих обозначениях базисные элементы V и V^* отличаются лишь положением индекса. Поэтому за положением индекса надо следить.

Задача 4.12. Доказать, что $(V^*)^* = V$.

Замечание. Этот факт верен в конечномерном случае, но может не иметь места в бесконечномерном.

6.0.2 Билинейные формы и транспонирование

Билинейной формой называется отображение

$$B(v\,, w) \in \mathbb{K}\,,$$

которое ставит в соответствие каждой паре векторов $v\,, w \in V$ число (элемент поля $\mathbb{K}$) и обладает следующими свойствами

$$B(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2\,, w) = \lambda_1 B(v_1, w) + \lambda_2 B(v_2, w)\,,$$

$$B(v\,, \lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2) = \lambda_1 B(v, w_1) + \lambda_2 B(v, w_2)$$

$\forall v, v_1, v_2, w, w_1, w_2 \in V$, $\lambda_{1,2} \in \mathbb{K}$.

Билинейные формы бывают симметричные $B(v, w) = B(w, v)$ и антисимметричные. (Формы, не обладающие определенной симметрией, тоже можно рассматривать, но обычно они менее интересны.) Форма $B(v\,, w)$ называется невырожденной, если не существует такого $v_0 \in V$, что $B(v_0\,, w) = 0\,\forall w$. (Если такой v_0 существует, то он называется нуль-вектором формы.)

Пусть $\{e_i\}$-базис V. Тогда можно определить матрицу

$$\eta_{ij} := B(e_i, e_j)\,. \tag{6.1}$$

Эта матрица (анти)симметрична, если форма $B(v, w)$ (анти)симметрична. Матрица η_{ij} (не)вырождена если форма $B(v, w)$ (не)вырождена.

Задача 4.13. Доказать.

Пусть линейный оператор A действует на V и $B(v, w)$ - невырожденная билинейная форма. Тогда оператор A' транспонированный к A по отношению к форме $B(v, w)$ задается сотношением

$$B(v, A(w)) = B(A'(v), w)\,, \qquad \forall v, w \in V\,. \tag{6.2}$$

Пусть в базисе $\{e_i\}$ оператор A задан соотношениями

$$A(e_i) = A_i{}^j e_j\,,$$

с некоторыми $A_i{}^j \in \mathbb{K}$. Тогда из (6.1) следует

$$\eta_{ik} A_j{}^k = A_i'^k \eta_{kj} \qquad \Longrightarrow \qquad A_i'^j = \eta_{ik} A_l{}^k \eta^{-1lj}\,, \tag{6.3}$$

где обратная матрица η^{-1lj} определяется соотношением

$$\eta_{ik} \eta^{-1kj} = \delta_i^j\,.$$

Если билинейная форма имеет вид $\eta_{ij} = \delta_{ij}$, то это дает обычное транспонирование.

Задача 4.14. Убедиться

Из формулы (6.2) следует, что

$$(AB)' = B'A'$$

Задача 4.15. Доказать.

В случае вещественного поля $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ билинейная форма называется *Положительно определенной*, если

$$B(v,v) \geq 0\,, \qquad B(v,v) = 0 \quad \Rightarrow \quad v = 0.$$

о

По определению, группа вращений $O(n)$ это группа линейных преобразований n-мерного линейного пространства V, оставляющая инвариантной положительно определенную билинейную форму. Иными словами

$$A \in O(n) \quad \Rightarrow \quad B(A(v), A(w)) = B(v,w)\,.$$

Отсюда следует

$$A'A = Id\,,$$

где транспонирование определяется по отношению к форме B.

В такой форме это определение не зависит от выбора базиса в V, который влияет на вид η_{ij}. Действительно, при переходе к новому базису

$$e'_i = U^i{}_j e^j$$

коэффициенты билинейной формы меняются следующим образом

$$\eta'^{ij} = U^i{}_k U^j{}_l \eta^{kl}\,.$$

Мы можем теперь немного расшифровать смысл картановской классификации.

Группа $B_n = O(2n+1)$, $D_n = O(2n)$. C_n симплектическая группа, которая, по определению, оставляет инвариантной невырожденную антисимметричную форму n-мерного векторного пространства называемую симплектической формой.

Задача 4.16. Доказать, что это возможно только для четных n.

Отличие групп вращений пространств четной и нечетной размерности связано с тем, что в четном случае совершенно антисимметричный символ Леви-Чивита $\epsilon^{m_1 m_2 \ldots m_{2n}}$ позволяет накладывать условия (анти)самодуальности на антисимметричные тензоры ранга n

$$T^{m_1 \ldots m_n} = \pm \frac{1}{n!} \epsilon^{m_1 \ldots m_n l_1 \ldots l_n} T_{l_1 \ldots l_n}\,,$$

где индексы поднимаются инваринтной метрикой η^{kl} группы $O(n)$

$$T^{m_1 \ldots m_n} := \eta^{m_1 l_1} \ldots \eta^{m_n l_n} T_{l_1 \ldots l_n}\,.$$

Наконец, A_n - это группа SL_{n+1} матриц $(n+1) \times (n+1)$ с единичным детерминантом.

7 Лекция 7.
1 курс, 2 семестр 24 Марта 2022.

7.1 Представления и модули

Группы удобно реализовывать линейными операторами в векторных пространствах. *Представление группы* G это ее реализация эндоморфизмами некоторого линейного пространства V

$$G \to End\, V.$$

Это означает, что каждому $g \in G$ сопоставляется оператор t_g в линейном пространстве V так, что его действие согласовано с действием группы

$$t_{g_1} t_{g_2} = t_{g_1 g_2}\,, \qquad \forall g_1, g_2 \in G.$$

Замечу, что в представлении ассоциативность действия группы достигается автоматически в следствие ассоциативности эндоморфизмов. Единичному элементу G сопоставляется единичное преобразование

$$t_e = Id$$

Совокупность операторов (матриц) t_g образует *представление* T группы G. Линейное пространство V, в котором действуют матрицы t_g, называется пространством представления или *G-модулем.* Часто G-модуль ассоциируется с совокупностью T, V.

Пусть $G = O(n)$. Какой $O(n)$-модуль мы уже знаем?

Задача 7.1. Убедиться, что $\mathbb{R}^n$ образует $O(n)$-модуль

Решение

$$O\vec{x} = \vec{x}' \in \mathbb{R}^n\,,$$

где O – ортогональная матрица.

Пусть V_1 и V_2 два G-модуля.

Задача 7.2. Задать действие G на $V_1 \oplus V_2$.

Решение

Пусть $v_1 \in V_1$ и $v_2 \in V_2$. Запишем их в единый столбец, а действие на нем определим следующим образом

$$\begin{pmatrix} G_1 & 0 \\ 0 & G_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1' \\ v_2' \end{pmatrix} \in V_1 \oplus V_2\,, \tag{7.1}$$

где матрицы G_1 и G_2 реализуют действие группы G на пространствах V_1 и V_2, соответственно.

Такой модуль называется *прямой суммой* модулей $V_1 \oplus V_2$.

Подмодулем V называется подпространство $W \in V$, которое само образует G-модуль.

Задача 7.3. Убедиться, что в прямой сумме $V_1 \oplus V_2$ V_1 и V_2 являются подмодулями.

Определение: G-модуль V называется *неприводимым,* если он не содержит нетривиальных (т.е. отличных от V и $\emptyset$) подмодулей. Соответственно, приводимый модуль содержит хотя бы один нетривиальный подмодуль.

Задача 7.4. Доказать, что $O(n)$-модуль $\mathbb{R}^n$ неприводим.

Как мы увидим, группы симметрий обычно реализуются в терминах линейных преобразований, т.е. модулей. Неприводимые модули играют роль строительных кирпичей при реализации симметрий. Важно, что неприводимые модули простых групп допускают осмысленную классификацию.

Важное замечание состоит в том, что не всякий приводимый модуль сводится к прямой сумме подмодулей. В общем случае возможна следующая треугольная ситуация. Пусть V_1 и V_2 два линейных пространства, как линейное пространство $V = V_1 \oplus V_2$ и G-модуль реализован так, что

$$G(V_1) \subset V_1\,, \qquad G(V_2) \subset V$$

Очевидно, в этом случае V_1 является подмодулем G-модуля V, но V не сводится к прямой сумме $V_1 \oplus V_2$. (Для чего нужно, чтобы $G(V_2) \subset V_2$). Приводимые модули, которые не сводятся к прямой сумме, называются *невполне приводимыми* или *неразложжымыми.*

Неразложимые модули имеют большое значение в таких физических моделях как, например, электродинамика, где они связаны с так называемыми калибровочными симметриями. Надо отметить, что неразложимых модулей относительно мало и они также поддаются классификации на языке теории гомологий.

Это делается так. Пусть U подмодуль G-модуля V. Тогда подпространство V/U образует G-модуль.

Задача 7.5. Доказать формально и объяснить смысл происходящего на языке матриц.

Решение

Пусть действие некоторой группы G на пространстве $V = U \oplus W$ можно представить матрицами вида

$$\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}. \tag{7.2}$$

Здесь A, B и C – некоторые матрицы. Легко проверить, что произведение матриц такого типа даст матрицу того же типа. При следующем действии группа G на векторном пространстве V

$$\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ w \end{pmatrix} \tag{7.3}$$

имеется инвариантный подмодуль. Вектора типа

$$\begin{pmatrix} u \\ 0 \end{pmatrix} \tag{7.4}$$

представляют инвариантное подпространство относительно действия группы определенного выше. Фактор-пространство V/U устроено таким образом, что вектора

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ w \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} u_2 \\ w \end{pmatrix} \tag{7.5}$$

эквивалентны. Мы в праве выбрать **любого** представителя, например,

$$\begin{pmatrix} 0 \\ w \end{pmatrix} \tag{7.6}$$

Тогда действие группы G на фактор-пространстве V/U это

$$(C)\,(w) \tag{7.7}$$

Задача 7.6. Убедиться

На языке *теории гомологий (математической чепухи)* происходящее описывается гомологической последовательностью

$$0 \to U \to V \to V/U \to 0\,,$$

где каждая стрелка обозначает гомоморфизм представлений (модулей).

Эта *гомологическая последовательность* является *точной*, что означает, что образ предыдущего отображения является ядром последующего.

Задача 7.7. Доказать.

7.2 Алгебры Ли и группы Ли

Алгебры Ли дают эффективный инструмент анализа симметрий путем анализа бесконечно малых симметрий. Рассмотрим группу Ли G размерности n, т.е. G описывается n непрерывными координатами типа углов поворотов, сдвигов и т.п.. Пусть $g \in G$ элемент группы близкий к единичному, а ϵ^i - бесконечно малые координаты группы в окрестности единичного элемента. Например, ϵ^i может описывать бесконечно малый сдвиг или поворот.

Чтобы не погружаться в тонкости геометрии групп Ли удобно рассмотреть не группу Ли G, а ее произвольное представление T с элементами $t^{\alpha}_{g\,\beta}$, где g элемент группы, которому отвечает матрица t_g. В случае, когда они бесконечно близки к единице,

$$t_g{}^{\alpha}{}_{\beta}(\epsilon) = \delta^{\alpha}_{\beta} + \epsilon^i t_i{}^{\alpha}{}_{\beta} + o(\epsilon)\,, \tag{7.8}$$

где δ^{α}_{β} - единичный оператор (матрица), а $t_i{}^{\alpha}{}_{\beta}$ - некоторый набор n матриц (n– размерность, группы) размерности $m \times m$, действующих в m-мерном G-модуле V

$$t_i(e^{\alpha}) = t_i{}^{\alpha}{}_{\beta} e^{\beta}\,, \qquad \alpha, \beta = 1, \dots m\,, \qquad i = 1, \dots n\,. \tag{7.9}$$

ϵ_i - численные параметры, считающиеся бесконечно малыми и имеющие смысл координат на группе в инфинитезимальной окрестности единицы. При этом предполагается, что любой элемент в инфинитезимальной окрестности единичного элемента G может быть представлен в виде (7.9) с некоторыми ϵ_i. Математически это означает, что группа Ли это многообразие, т.е. в окрестности любой точки ведет себя как $\mathbb{R}^{dimG}$.

Для дальнейшего анализа полезно рассмотреть члены до второго порядка малости, чтобы затем убедиться, что члены второго порядка вклада не дадут

$$t_g{}^\alpha{}_\beta(\epsilon) = \delta^\alpha_\beta + \epsilon^i t_i{}^\alpha{}_\beta + \epsilon^i\epsilon^j s_{ij}{}^\alpha{}_\beta + o(\epsilon^2)\,. \tag{7.10}$$

Вычислим обратный элемент.

Задача 7.8. Убедиться, что

$$t_{g^{-1}}{}^\alpha{}_\beta(\epsilon) = \delta^\alpha_\beta - \epsilon^i t_i{}^\alpha{}_\beta - \epsilon^i\epsilon^j s_{ij}{}^\alpha{}_\beta + \epsilon^i\epsilon^j t_i{}^\alpha{}_\gamma t_j{}^\gamma{}_\beta + o(\epsilon^2)\,. \tag{7.11}$$

Пусть g_1 и g_2 два элемента G близкие к единичному. Рассмотрим следующий элемент

$$g_{1,2} := g_1 g_2 g_1{}^{-1} g_2^{-1} \in G\,, \tag{7.12}$$

который также будет близок к единичному.

Пусть ϵ_1^i и и ϵ_2^i инфинитезимальные координаты g_1 и g_2 , соответственно. Вычислим

$$t_{g_1} t_{g_2} t_{g_1^{-1}} t_{g_2^{-1}}$$

с точностью до членов второго порядка. Прямое вычисление довольно громоздко, но окончательный ответ оказывается простым и может быть легко получен с помощью простой леммы:

$$t_{g_1} t_{g_2} t_{g_1^{-1}} t_{g_2^{-1}}{}^\alpha{}_\beta = \delta^\alpha_\beta \qquad \text{при} \quad \epsilon_1 = 0 \quad \text{или} \quad \epsilon_2 = 0\,. \tag{7.13}$$

Задача 7.9. Доказать, учитывая, что $g(\epsilon)|_{\epsilon=0} = e$.

Замечу, что выражение (7.12) выбрано именно с таким расчетом, чтобы было удобно использовать лемму (7.13).

Из Леммы (7.13) следует, что все члены, содержащие только ϵ_1 или ϵ_2 сокращаются и, с точностью до членов старших порядков, остаются только члены, содержащие $\epsilon_1\epsilon_2$. Последние нетрудно вычислить. В частности, из Леммы (7.13) следует, что члены второго порядка по ϵ в (7.10) и (7.11) не дают вклада в рассматриваемом приближении, т.е. при вычислении достаточно использовать (7.8) и

$$t^\alpha_{g^{-1}(\epsilon)\beta} = \delta^\alpha_\beta - \epsilon^i t_i{}^\alpha{}_\beta + \ldots \tag{7.14}$$

Поскольку ϵ_1 входит через g_1 и g_1^{-1}, то член линейный по ϵ_1 может появиться через одну из двух комбинаций $t_{g_1} t_{g_2} t_{g_2^{-1}}$ или $t_{g_2} t_{g_1^{-1}} t_{g_2^{-1}}$ Но так как $t_{g_1} t_{g_2} t_{g_2}^{-1} = t_{g_1}$, этот член зависит только от ϵ_1 и, следовательно, не дает вклада в окончательный ответ по Лемме (7.13). Таким образом, остается вычислить члены порядка $\epsilon_1\epsilon_2$ в $t_{g_2} t_{g_1^{-1}} t_{g_2^{-1}}$. Это дает два члена, в которые ϵ_2 приходит либо из первого, либо из последнего сомножителя. В результате, получаем

$$t_{g_1} t_{g_2} t_{g_1^{-1}} t_{g_2^{-1}}{}^\alpha{}_\beta = \delta^\alpha{}_\beta + \epsilon_1^i\epsilon_2^j (t_i{}^\alpha{}_\gamma t_j{}^\gamma{}_\beta - t_j{}^\alpha{}_\gamma t_i{}^\gamma{}_\beta) + o(\epsilon^3)\,.$$

Таким образом показано, что

$$t_{g_1} t_{g_2} t_{g_1^{-1}} t_{g_2^{-1}}{}^{\alpha}{}_{\beta} = \delta^{\alpha}{}_{\beta} + \epsilon_1^i \epsilon_2^j [t_i\,, t_j]^{\alpha}{}_{\beta} + o(\epsilon^3)\,, \tag{7.15}$$

где $[a,b]$ обозначает коммутатор матриц

$$[a,b]^{\alpha}{}_{\beta} := (ab)^{\alpha}{}_{\beta} - (ba)^{\alpha}{}_{\beta}\,, \qquad (ab)^{\alpha}{}_{\beta} = a^{\alpha}{}_{\gamma} b^{\gamma}{}_{\beta}\,.$$

Поскольку элемент (7.15) находится в инфинитезимальной окрестности единицы группы он должен допускать представление (7.8). Это требует

$$[t_i, t_j] = f_{ij}^k t_k, \tag{7.16}$$

где f_{ij}^k - некоторые численные коэффициенты, называемые *структурными коэффициентами.* Структурные коэффициенты f_{ij}^k во многом определяют структуру группы Ли G.

По своему определению, коммутатор

$$[a,b] := a \circ b - b \circ a\,, \tag{7.17}$$

определенный по некоторому ассоциативному произведению $\circ$ (в нашем случае матричному), удовлетворяет важному соотношению, называемому тождеством Якоби

$$[a,[b,c]] + [b,[c,a]] + [c,[a,b]] = 0. \tag{7.18}$$

Задача 7.10. Проверить

Теперь мы можем ввести понятие алгебры Ли, имеющее фундаментальное значение в математике и физике.

Определение: Алгебра l с произведением, обозначаемым $[a,b]$ $\forall a,b \in l$, называется алгеброй Ли, если произведение антисимметрично

$$[a,b] = -[b,a] \tag{7.19}$$

и для любых $a,b,c \in l$ выполняется тождество Якоби (7.18), (которое является тождеством только если $[,]$ - коммутатор, построенный по ассоциативному произведению согласно (7.17)).

Пусть t_i - некоторый базис алгебры Ли l. Тогда должны выполняться соотношения (7.16) с некоторыми структурными коэффициентами f_{ij}^k, которые антисимметричны

$$f_{ij}^k = -f_{ji}^k \tag{7.20}$$

и удовлетворяют тождеству Якоби в форме

$$f_{ij}^l f_{lk}^n + f_{jk}^l f_{li}^n + f_{ki}^l f_{lj}^n = 0\,. \tag{7.21}$$

Задача 7.11. Проверить.

Представлением алгебры Ли l называется ее реализация матрицами ${t_i}^\alpha{}_\beta$ с лиевским произведением, реализованным матричным коммутатором. Модулем алгебры Ли l называется линейное пространство V , в котором элементы l действуют как линейные операторы согласно (7.8).

Важным следствием описанной конструкции является то, что всякая группа Ли G порождает алгебру Ли g, и всякий G-модуль порождает g-модуль. Идея в том, чтобы вместо групп изучать их алгебры Ли, а вместо G-модулей изучать g-модули, так как часто это проще.

Мы применим эту идею к различным симметриям, включающим группу движений $\mathbb{R}^n$ и релятивистским симметриям, что позволит нам вскоре построить спинорное представление этих симметрий.

При этом важно помнить, что, вообще говоря, алгебры Ли характеризуют порождающие их группы Ли не полностью. В частности, могут существовать разные группы Ли, обладающие одной алгеброй Ли.

Задача 7.12. Привести пример.

8 Лекция 8.
1 курс, 2 семестр 31 марта 2022.

8.1 Примеры алгебр Ли

8.1.1 $gl(n)$

Группа $GL(n)$ это группа невырожденных (обратимых) матриц

$$a^i{}_j\,, \qquad i,j=1,...n. \tag{8.1}$$

Элемент $g\in G$ близкий к единичному имеет вид

$$g^i{}_j=\delta^i{}_j+\varepsilon t^i{}_j, \tag{8.2}$$

где $t^i{}_j$ - любая матрица, а параметр ε бесконечно мал. Поэтому алгебра Ли $gl(n)$ - это алгебра всевозможных матриц $n\times n$ с матричным произведением (5.11) в качестве лиевского произведения.

Задача 8.1. Какова размерность $gl(n)$? Введем базис в $gl(n)$ следующим образом. $(e^a{}_b)^i{}_j$ - матрица с единственным отличным от нуля элементом, расположенном на пересечении a-й строки и b-ого столбца. Здесь a и b нумеруют разные элементы в пространстве матриц, а i и j нумеруют элементы данной матрицы при фиксированных a и b.

Задача 8.2. Убедиться, что $(e^a{}_b)^i{}_j$ образуют базис в пространстве матриц.

Матрицу $(e^a{}_b)^i{}_j$ удобно представить в виде

$$(e^a{}_b)^i{}_j=\delta^a{}_j\delta^i{}_b\,. \tag{8.3}$$

Задача 8.3. Убедиться, что в этом базисе

$$e^a{}_be^c{}_d=\delta^a{}_de^c{}_b \tag{8.4}$$

и, следовательно,

$$[e^a{}_b,e^c{}_d]=\delta^a{}_de^c{}_b-\delta^c{}_be^a{}_d. \tag{8.5}$$

Решение

Проверим эти соотношения прямой подстановкой

$$e^a{}_be^c{}_d=(e^a{}_b)^i{}_k(e^c{}_d)^k{}_j=\delta^a_k\delta^i_b\;\delta^c_j\delta^k_d=\delta^a_k\delta^k_d\;\delta^i_b\delta^c_j=\delta^a_d(e^c{}_b)^i{}_j=\delta^a_de^c{}_b \tag{8.6}$$

$$[e^a{}_b,e^c{}_d]\equiv e^a{}_be^c{}_d-e^c{}_de^a{}_b=\delta^a_de^c{}_b-\delta^c_be^a{}_d \tag{8.7}$$

Формула (8.5) задает определяющие соотношения алгебры Ли $gl(n)$. Ее надо помнить как таблицу умножения. Мы вывели эту формулу в тавтологическом (матричном) представлении $gl(n)$. Но у $gl(n)$ есть много других представлений. Во всех этих представлениях существует базис, в котором определяющие соотношения $gl(n)$ имеют вид (8.5).

8.1.2 Символ Леви-Чевита, детерминант и след

В дальнейшим нам понадобится важный объект, который называется совершенно антисимметричным (псевдо)тензором или символом Леви-Чивита и обозначается $\epsilon^{a_1\cdots a_n}$, где n совпадает с размерностью пространства-времени. Например, в четырехмерном случае символ Леви-Чивита ϵ^{abcd} несет четыре индекса.

По определению, ϵ^{abcd} антисимметричен относительно перестановки любой пары индексов

$$\epsilon^{\dots a\dots b\dots} = -\epsilon^{\dots b\dots a\dots}\,. \tag{8.8}$$

Это означает, в частности, что он равен нулю, если хотя бы одна пара индексов совпадает. Значит, $\epsilon^{a_1\cdots a_n}$ может быть отличен от нуля только если все индексы попарно различны. Полагая

$$\epsilon^{0\,1\,2\dots n-1} = 1\,, \tag{8.9}$$

получаем, что для других расстановок индексов $\epsilon^{a_1\cdots a_n} = 1$ для четных подстановок индексов и $\epsilon^{a_1\cdots a_n} = -1$ - для нечетных. Таким образом, $\epsilon^{a_1\cdots a_n}$ реализует представления группы S_n, в котором ее четные элементы реализованы тривиально, а нечетные - умножением на -1. Замечу, что выбор знака $\epsilon^{0\,1\,2\dots n-1}$ является вопросом удобства.

Символ Леви-Чивита является очень важным инструментом. Например, с его помощью легко определить детерминант и доказать, что он обладает мультипликативным свойством. Пусть дана матрица A^a_b. Рассмотрим выражение

$$\epsilon^{a_1\dots a_n} A^{b_1}{}_{a_1}\dots A^{b_n}{}_{a_n} \tag{8.10}$$

Поскольку $\epsilon^{a1\dots a_n}$ полностью антисимметричен, а элементы матрицы $A^b{}_a$ коммутативны, это выражение полностью антисимметрично по индексам b_i. Но это значит, что оно пропорционально $\epsilon^{b_1\cdots b_n}$. Назовем коэффициент пропорциональности детерминантом $\det|A|$

$$\epsilon^{a_1\cdots a_n} A^{b_1}{}_{a_1}\dots A^{b_n}{}_{a_n} := \det|A|\epsilon^{b_1\cdots b_n} \tag{8.11}$$

и проверим, что он обладает свойством мультипликативности. Действительно, с одной стороны, по определению,

$$\epsilon^{a_1\dots a_n} A^{b_1}{}_{c_1} B^{c_1}{}_{a_1}\dots A^{b_n}{}_{c_n} B^{c_n}{}_{a_n} = \det|AB|\epsilon^{b_1\dots b_n}\,. \tag{8.12}$$

С другой,

$$\epsilon^{a_1\dots a_n} A^{b_1}{}_{c_1} B^{c_1}{}_{a_1}\dots A^{b_n}{}_{c_n} B^{c_n}{}_{a_n} = \det|B|\epsilon^{c_1\cdots c_n} A^{b_1}{}_{c_1}\dots A^{b_n}{}_{c_n} = \det|B|\det|A|\epsilon^{b_1\dots b_n}, \tag{8.13}$$

т.е.,

$$\det|AB| = \det|A|\det|B|\,. \tag{8.14}$$

Остается заметить, что нормировка в (8.11) выбрана так, что $\det|\delta^n_m| = 1$. Кроме того, из формулы (8.11) следует, что

$$det|A| = \frac{1}{n!}\epsilon^{a_1\dots a_n}\epsilon_{b_1\dots b_n} A^{b_1}{}_{a_1}\dots A^{b_n}{}_{a_n} \tag{8.15}$$

($\epsilon_{b_1\dots b_n}$ с нижними индексами определяется аналогично $\epsilon^{b_1\dots b_n}$ или может быть получен из последнего путем опускания индексов при наличии метрики с единичным детерминантом).

Задача 8.4. Доказать. Убедится, что эта формула приводит к обычному определению детерминанта.

Важное следствие этого анализа состоит в том, что $\epsilon^{a_1\dots a_n}$ и $\epsilon_{b_1\dots b_n}$ являются инвариантами группы $SL(n)$.

Задача 8.5. Доказать

Найдем детерминант матрицы близкой к единичной

$$A^i{}_j = \delta^i_j + \varepsilon t^i{}_j.$$

Используя определения детерминанта через символ Леви-Чивиты, получаем

$$\det\left|\delta^i_j + \varepsilon t^i{}_j\right| = \epsilon_{i_1 i_2\dots i_n}(\delta^{i_1}_1 + \varepsilon t^{i_1}{}_1)(\delta^{i_2}_2 + \varepsilon t^{i_2}{}_2)\dots(\delta^{i_n}_n + \varepsilon t^{i_n}{}_n)_n\Big) + o(\varepsilon^2)\,, \tag{8.16}$$

т.е. произведение диагональных элементов. Очевидно, это дает важный результат

$$\det\left|\delta^i_j + \varepsilon t^i{}_j\right| = 1 + \varepsilon t^k{}_k + O(\varepsilon^2)\,. \tag{8.17}$$

Определение: Следом матрицы $t^n{}_n$ называется величина

$$\mathrm{tr}(t) := t^i{}_i \tag{8.18}$$

Задача 8.6. Доказать Лемму: коммутатор $[a, b]$ имеет нулевой след для любых матриц a и b

$$\mathrm{tr}([a, b]) = 0. \tag{8.19}$$

Решение

След от произведения двух матриц в индексных обозначениях имеет вид

$$\mathrm{tr}(ab) = a^i{}_j b^j{}_i. \tag{8.20}$$

Отсюда видно, что

$$\mathrm{tr}(ab) = \mathrm{tr}(ba). \tag{8.21}$$

Следовательно, след от коммутатора двух матриц равен нулю

$$\mathrm{tr}\,([a, b]) = \mathrm{tr}\,(ab - ba) = \mathrm{tr}(ab) - \mathrm{tr}(ba) = \mathrm{tr}(ab) - \mathrm{tr}(ab) = 0\,. \tag{8.22}$$

Так же очевидна линейность следа, т.е.

$$\mathrm{tr}(c + d) = c^i{}_i + d^i{}_i. \tag{8.23}$$

С более общей точки зрения соотношение (8.19) служит определением следа для произвольной ассоциативной алгебры: следом $\mathrm{tr}(a)$ ассоциативной алгебры A называется любое линейное отображение $A \to \mathbb{K}$ в поле, над которым построена A, удовлетворяющее условию

$$\mathrm{tr}(a \circ b) = \mathrm{tr}(b \circ a)\,, \qquad \forall a, b \in A. \tag{8.24}$$

8.1.3 $sl(n)$

$SL(n)$ - это группа матриц с единичным детерминантом. Детерминант единичной матрицы равен единице. Из (8.17) вытекает, что алгебра Ли $sl(n)$ это алгебра коммутаторов матриц с нулевым следом

$$\mathrm{tr}(t) := t^i{}_i = 0. \tag{8.25}$$

Задача 8.7. С помощью Леммы (8.19) убедиться, что матрицы с нулевым следом образуют алгебру Ли.

8.1.4 $o(n)$

В определяющих соотношениях ортогональной группы

$$A^i{}_k A^j{}_l \delta_{ij} = \delta_{kl} \tag{8.26}$$

положим

$$A^i{}_j = \delta^i{}_j + \varepsilon t^i{}_j. \tag{8.27}$$

В линейном по ε приближении это дает условия

$$\delta_{ij} t^i{}_k \delta^j{}_l + \delta_{ij} \delta^i{}_k t^j{}_l = 0, \tag{8.28}$$

что эквивалентно

$$\delta_{il} t^i{}_k + \delta_{jk} t^j{}_l = 0. \tag{8.29}$$

Вводя обозначение

$$t_{lk} := \delta_{il} t^i{}_k \tag{8.30}$$

получаем условие

$$t_{lk} + t_{kl} = 0. \tag{8.31}$$

Это означает, что алгебра Ли $o(n)$ описывается антисимметричными матрицами

$$t_{ij} = -t_{ji}. \tag{8.32}$$

Задача 8.8. Убедиться, что коммутатор антисимметричных матриц дает антисимметричную матрицу, т.е. $o(n)$ действительно алгебра Ли.

В качестве базиса $o(n)$ можно выбрать антисимметричные матрицы

$$t_{ab} := \delta_{ac} e^c{}_b - \delta_{bc} e^c{}_a. \tag{8.33}$$

Задача 8.9. Найти определяющие соотношения алгебры Ли $o(n)$

С помощью (8.5) легко убедиться, что

$$[t_{ab}, t_{cd}] = -\delta_{bc} t_{ad} + \delta_{ac} t_{bd} + \delta_{bd} t_{ac} - \delta_{ad} t_{bc}. \tag{8.34}$$

8.1.5 $sp(2n)$

Симплектическая группа $Sp(2n)$ определяется соотношениями похожими на (8.33) с заменой симметричной метрики δ_{ij} на антисимметричную невырожденную форму $C_{ij} = -C_{ji}$

$$A^i{}_k A^j{}_l C_{ij} = C_{kl}. \tag{8.35}$$

Задача 8.10. Вычислить размерность $Sp(2n)$

Задача 8.11. Найти матричную реализацию алгебры Ли $sp(2n)$

Алгебры $sl(n)$, $o(n)$, $sp(2n)$ исчерпывают четыре бесконечные серии классических простых алгебр по классификации Картана (над комплексным полем). При этом алгебры $o(n)$ при четных и нечетных n различаются. Кроме этих алгебр есть еще пять исключительных алгебр Ли $g_2,\ f_4,\ e_6,\ e_7,\ e_8$.

Задача 8.12. Убедиться, что алгебра $gl(n)$ не простая.

8.1.6 Вещественные алгебры

Классификация алгебр Ли над вещественным полем более сложна. Так вместо (8.35) можно написать

$$A^i{}_k A^j{}_l \eta_{ij} = \eta_{kl}. \tag{8.36}$$

где η_{ij} произвольная невырожденная симметричная матрица (форма). Переходя от η_{kl} к

$$\eta'_{ij} = U^k_i U^l_j \eta_{kl}, \tag{8.37}$$

мы лишь меняем базис в пространстве, где действуют повороты. Это значит, что уравнения (8.36) с η_{kl} и η'_{kl}, связанными (8.37), описывают одну и ту же алгебру Ли. Из курса линейной алгебры известно, что классы эквивалентности по отношению к преобразованию (8.37) определяются индексом инерции, равным разности чисел положительных и отрицательных собственных значений. Иными словами, в качестве представителей разных классов эквивалентности можно взять

$$\eta_{ij} = \delta_{ij}\,, \qquad i,j = 1,\dots,p \tag{8.38}$$

$$\eta_{ij} = -\delta_{ij}\,, \qquad i,j = p+1,\dots,p+q, \tag{8.39}$$

и $\eta_{ij} = 0$ в остальных случаях.

Матрицы $A^i{}_j$, удовлетворяющие (8.36), образуют псевдоортогональную группу $O(p,q)$. Соответствующая алгебра Ли обозначается $so(p,q)$.

Задача 8.13. Доказать, что $so(p,q) = so(q,p)$

Задача 8.14. Найти структурные соотношения $so(p,q)$

Определение: Алгебра l_r называется *вещественной формой* комплексной алгебры l_c, если последняя получается из l_r в результате замены поля вещественных чисел на поле комплексных чисел. Алгебры $so(p,q)$ (с $q > p$) задают различные вещественные формы комплексной алгебры $o(p+q|\mathbb{C})$.

Задача 8.15. Доказать

Аналогично, различные вещественные формы $sl(n)$ обозначаются $sl(n|\mathbb{R})$ и $su(p,q)$ $(p+q=n)$. $sp(2n|\mathbb{C})$ также допускает различные вещественные формы.